Ю. Н. Макарычев
Н. Г. Миндюк
К. И. Нешков
И. Е. Феоктистов

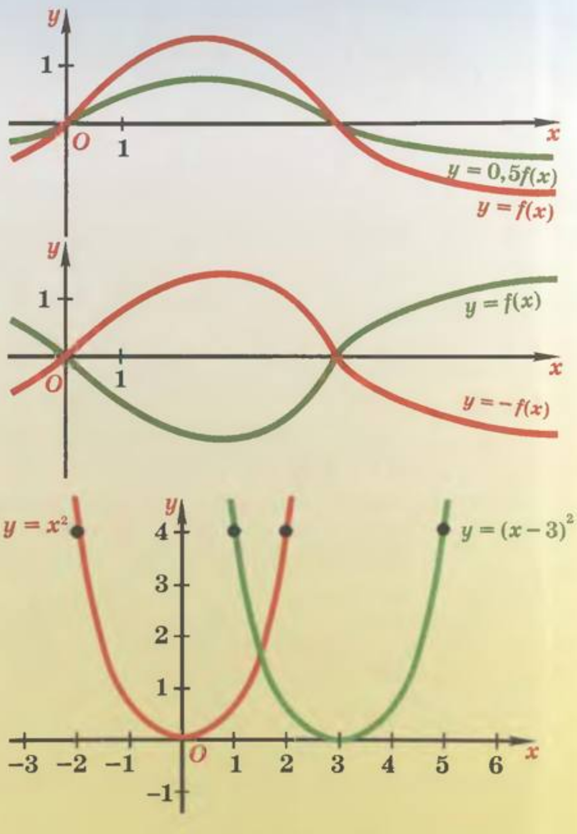
АЛГЕБРА

Учебник

8

Издательство
МНЕМОЗИНА

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ



СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Для любого $a \neq 0$ и целых m и n:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и целого n:

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

где $n \in N$

Н. Макарычев
Н. Г. Миндюк
К. И. Нешков
Е. Феоктистов

АЛГЕБРА

8

Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений

10-е издание, исправленное

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

Москва 2010

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
М15

**На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106—5215/9 от 31.10.2007)
и Российской академии образования (№ 01—657/5/7д от 29.10.2007)**

Макарычев Ю. Н.

М15 Алгебра. 8 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. — 10-е изд., испр. — М. : Мнемозина, 2010. — 384 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01446-1

Данный учебник предназначен для углубленного изучения алгебры в 8 классе и входит в комплект из трех книг: «Алгебра-7», «Алгебра-8» и «Алгебра-9». Его содержание полностью соответствует современным образовательным стандартам, а особенностями являются расширение и углубление традиционных учебных тем за счет теоретико-множественной, вероятностно-статистической и историко-культурной линий. В учебнике представлен большой набор разнообразных по тематике и уровню сложности упражнений.

Главы 1, 6, 7 написаны Ю. Н. Макарычевым; главы 2, 5, а также § 7, 8 — Н. Г. Миндюк; глава 4, а также § 6 — К. И. Нешковым; п. 19, 29, 42, исторические сведения, методический комментарий для учителя, ряд упражнений развивающего характера по всем темам курса — И. Е. Феоктистовым.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич, **Миндюк** Нора Григорьевна, **Нешков** Константин Иванович, **Феоктистов** Илья Евгеньевич

АЛГЕБРА
8 класс

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.
Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,0. Тираж 25 000 экз. Заказ № 1001380.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285. E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-346-01446-1

Предисловие для учащихся

Дорогие восьмиклассники! В этом году вы продолжите изучение курса алгебры. Вам предстоит познакомиться с рациональными выражениями, научиться решать квадратные и дробно-рациональные уравнения, линейные неравенства и их системы. На уроках вы будете не только строить графики функций, но и выполнять их преобразования — сдвиг, симметрию относительно прямой и относительно точки. Вы узнаете об иррациональных числах, об арифметических квадратных корнях и их свойствах, о степени с отрицательным показателем и о многом другом. Все это поможет вам при изучении геометрии, физики, химии и других школьных предметов.

Данный учебник предназначен для углубленного изучения алгебры. Вам нужно будет внимательно читать объяснительные тексты учебника, выполнять различные упражнения, среди которых немало задач на смекалку. После прочтения каждого параграфа очень полезно отвечать на контрольные вопросы. В этом учебном году вам предстоит узнать много нового, полезного и интересного, приобрести важные навыки в работе с алгебраическими выражениями, уравнениями, неравенствами, функциями. Все это необходимо для успешного обучения в школе, для сдачи экзамена по алгебре за курс основной школы в 9-м классе, но не только для этого. Те мыслительные операции, которым вы научитесь на уроках алгебры, будут помогать успешно изучать и другие учебные дисциплины. Как сказал великий русский ученый М. В. Ломоносов, «математику уже затем изучать следует, что она ум в порядок приводит».

Авторы надеются, что изучение алгебры по этому учебнику будет для вас интересным и полезным, позволит увидеть алгебру не только как учебный школьный предмет, но и как средство самовоспитания, развития своих способностей, поможет рассматривать математику как часть общечеловеческой культуры.

ГЛАВА 1 ДРОБИ

§ 1. ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Числовые дроби и дроби, содержащие переменные

Дробью называют выражение вида $\frac{a}{b}$, где буквами обозначены числовые выражения или выражения, содержащие переменные. Выражение a называют *числителем* дроби $\frac{a}{b}$, а выражение b — ее *знаменателем*.

Обозначение дроби в виде $\frac{a}{b}$ впервые появилось в «Книге абака» (1202 г.) итальянского математика Леонардо Фибоначчи, а широкое распространение в Европе данная запись получила после появления работ французского математика Франсуа Виета.

Примерами числовых дробей являются дроби:

$$\frac{2}{7}, \qquad \frac{3{,}5+2{,}3\cdot 5}{-8}, \qquad \frac{1{,}6}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}.$$

Леонардо Фибоначчи (Пизанский), (1180—1240), итальянский математик; в своем главном труде «Книга абака» (1202 г.) впервые систематически изложил достижения арабской математики; ввел в рассмотрение первую возвратную последовательность чисел — так называемый ряд Фибоначчи.

Примерами дробей с переменными являются дроби:

$$\frac{3}{x}, \qquad \frac{y^2-y+12}{y+8}, \qquad \frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{m-n}.$$

Чтобы найти значение дроби, надо найти значение ее числителя и значение знаменателя и первый результат разделить на второй.

Найдем, например, значение дроби $\frac{48{,}2 + 21{,}8}{15{,}6 - 3{,}2 \cdot 4}$:

$$\frac{48{,}2 + 21{,}8}{15{,}6 - 3{,}2 \cdot 4} = \frac{70}{15{,}6 - 12{,}8} = \frac{70}{2{,}8} = \frac{700}{28} = \frac{100}{4} = 25.$$

Если окажется, что знаменатель дроби равен нулю, то такая дробь *не имеет смысла*.

Например, дробь $\frac{10}{14 - 2 \cdot 7}$ не имеет смысла, так как ее знаменатель $14 - 2 \cdot 7$ равен 0, а делить на нуль нельзя.

Значение дроби, содержащей переменные, зависит от значений этих переменных.

Например, дробь $\frac{x+5}{x-3}$ при $x = 2$ принимает значение, равное -7, при $x = 8$ значение дроби равно 2,6. При $x = 3$ дробь *не имеет смысла*, так как при этом значении x она обращается в числовую дробь, знаменатель которой равен 0.

Число 3 — единственное значение x, при котором дробь $\frac{x+5}{x-3}$ не имеет смысла. При всех остальных значениях x дробь имеет определенное значение. Говорят, что числа, отличные от 3, — *допустимые значения переменной* x, а множество всех чисел, отличных от 3, называют *областью допустимых значений переменной в выражении* $\frac{x+5}{x-3}$.

Для дроби $\frac{x+y}{x-y}$, которая содержит две переменные, допустимыми значениями являются все пары чисел $(x; y)$, в которых $x \neq y$.

Для дроби $\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ допустимыми являются все числа, у которых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a \neq b$.

Заметим, что для таких выражений, как $\frac{1}{x-x}$, множество допустимых значений переменной x — пустое множество. Они не имеют смысла при любых значениях переменных, и мы исключаем их из дальнейшего рассмотрения.

П р и м е р 1. Найдем допустимые значения переменной для дроби $\frac{x}{x^2-25}$.

Допустимыми значениями переменной для этой дроби являются значения x, при которых знаменатель x^2-25 отличен от нуля. Чтобы их найти, надо решить уравнение $x^2-25=0$.

Для решения уравнения $x^2-25=0$ разложим его левую часть на множители. Получим: $(x-5)(x+5)=0$.

Отсюда $x=5$ или $x=-5$.

Значит, для дроби $\frac{x}{x^2-25}$ допустимыми значениями переменной являются все числа, отличные от -5 и 5.

П р и м е р 2. Найдем множество целых чисел, при которых дробь $\frac{13}{n+3}$ принимает целые значения.

Число 13 — простое. Поэтому оно имеет четыре целых делителя: -13; -1; 1; 13. Значит, знаменателем дроби может быть число -13; -1; 1 или 13. Решив уравнения $n+3=-13$, $n+3=-1$, $n+3=1$, $n+3=13$, найдем множество целых чисел, при которых данная дробь принимает целые значения.

О т в е т: $\{-16; -4; -2; 10\}$.

П р и м е р 3. Докажем тождество

$$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}=c-2.$$

Так как черта дроби представляет собой знак деления, то для доказательства тождества воспользуемся определением частного: частным от деления числа a на число b $(b \neq 0)$ называется такое число k, что $a=bk$. Значит, для доказательства тождества достаточно показать, что при любых значениях c верно равенство

$$(c^2+2c-1)(c-2)=c^3-5c+2.$$

Имеем:

$$(c^2+2c-1)(c-2)=c^3+2c^2-c-2c^2-4c+2=c^3-5c+2.$$

Тождество доказано.

В этой главе мы будем заниматься преобразованиями *рациональных выражений.*

Рациональными выражениями называют выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень.

Рациональные выражения делятся на два класса: *целые* и *дробные.*

Целым называется рациональное выражение, которое не содержит операции деления на выражение с переменными.

Дробным называется рациональное выражение, которое не является целым, т. е. содержит операцию деления на выражение с переменными.

Например, выражения

$$\frac{4}{9}\cdot 75,\quad 5a^2,\quad x^2-7x+6,\quad (b+c)^2-b(b-2c),\quad \frac{y-7x}{15} \text{ —}$$

целые рациональные выражения, а выражения

$$\frac{x}{x+y},\quad \frac{a+2}{a-8}+3,\quad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{c} \text{ —}$$

дробные рациональные выражения.

Заметим, что выражения $|x|$, $a-|2b|$ и вообще выражения, содержащие переменную под знаком модуля, не являются рациональными выражениями. В дальнейшем вы познакомитесь и с другими выражениями, которые не являются рациональными выражениями.

Следует обратить внимание на существенное различие в понятиях *дробь* и *дробное выражение.* Дробь может быть как дробным, так и целым выражением, а дробное выражение может и не быть дробью.

Например, $\frac{a}{5}$ и $\frac{5}{a}$ — это дроби. Но $\frac{a}{5}$ — целое выражение, а $\frac{5}{a}$ — дробное выражение. Выражение $(x+6) : y$ не является дробью, но это выражение — дробное.

Добавим, что дробь равна нулю тогда и только тогда, когда она имеет смысл, а ее числитель равен нулю, т. е. $\frac{a}{b}=0$, если $a=0$ и $b\neq 0$.

1. Какие из выражений

$$\frac{x}{9},\quad 3\frac{1}{8},\quad \frac{7}{a+b},\quad \frac{1}{2}a,\quad \frac{x}{y}+2,\quad \frac{a^2-b^2}{ab}$$

являются дробями?

2. Представьте в виде дроби выражение:

а) $1\frac{2}{7}$; в) $-0{,}75$; д) $0{,}2x$; ж) $(a+b):3$;

б) $3\frac{2}{5}$; г) $0{,}37:1{,}11$; е) $2\frac{3}{7}y$; з) $(x-5):(y+5)$.

3. Какие из выражений

$$3a^2b^4,\quad \left(\frac{1}{3}x+y\right)\left(\frac{1}{3}x-y\right),\quad \frac{4a-b}{2a}+5,\quad \frac{|x|+1}{x^2-5},\quad \frac{x+2y}{10},$$

$$12xy-\frac{7}{8},\quad \frac{c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}},\quad (x^2-8xy-y^2):x$$

являются целыми и какие дробными?

4. Запишите частное в виде дроби:

а) $5:(x+3)$; в) $(a+25):7$;

б) $(y-1):(y^2+1)$; г) $(a^2+a+1):(b^2-b+7)$.

5. Вычислите:

а) $\frac{239^2-187^2}{426}$; в) $\frac{3{,}7^2+6{,}3\cdot 3{,}7}{111}$;

б) $\frac{17^2+442+13^2}{30}$; г) $\frac{8{,}3^2-83\cdot 0{,}13}{0{,}7}$.

6. Найдите значение дроби $\frac{x^2+5x-24}{x^2+5x-6}$, если:

а) $x=7$; в) $x=0$; д) $x=0{,}5$;

б) $x=3$; г) $x=-2$; е) $x=1{,}9$.

7. По какому признаку из множества обыкновенных дробей вида $\frac{1}{n}$, где $n \leqslant 20$, выделено подмножество:

а) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \frac{1}{20}\right\}$;

б) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{18}\right\}$;

в) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}\right\}$;

г) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \frac{1}{19}\right\}$?

8. Запишите путем перечисления элементов множество:

$$A = \left\{\frac{a}{15} \,\middle|\, a \in N,\ a < 15\right\}.$$

Выделите из множества A подмножество:

а) несократимых дробей; б) сократимых дробей.

9. Расстояние между пристанями 24 км. Моторная лодка имеет собственную скорость v км/ч, а скорость течения реки равна 2 км/ч. Сколько времени t затратит на весь путь моторная лодка, двигаясь против течения реки? Найдите t, если:

а) $v = 38$ км/ч; б) $v = 18$ км/ч.

10. Вкладчик положил в сбербанк a рублей. Через год его вклад увеличился на b рублей. Какой процент p от вклада начисляет банк ежегодно? Выразите переменную p через a и b. Найдите значение p, если:

а) $a = 200$, $b = 40$; б) $a = 500$, $b = 30$.

11. При каких значениях переменной дробь имеет смысл:

а) $\frac{12}{x^2 - 81}$; б) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 9x + 14}$; в) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 25}$; г) $\frac{1}{x - \frac{4}{x}}$?

12. Найдите допустимые значения переменной для дроби:

а) $\frac{3y}{|y| - 1}$; в) $\frac{5y - 10}{3}$; д) $\frac{18}{y^3 - 64y}$;

б) $\frac{2}{y^2 - 5|y|}$; г) $\frac{y}{y^2 + 2y - 3}$; е) $\frac{2y - 1}{(2y + 1)^3 - (8y + 4)}$.

13. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\frac{4x^2 - 1}{4}$; б) $\frac{4}{4x^2 - 1}$; в) $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$; г) $\frac{x^2 - y^2}{2xy}$.

14. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = -\frac{1}{x^2 - x}$; в) $\alpha(x) = \frac{x - x^3}{3}$;

б) $g(x) = \frac{x^2 - x}{1 - x}$; г) $\beta(x) = \frac{2x - 1}{2x^2 - x - 1}$.

15. Составьте дробное выражение с одной переменной, для которого допустимыми значениями являются:

а) все числа, кроме 5;

б) все числа, кроме −4 и 4;

в) все числа, кроме −1, 0 и 1;

г) все числа.

16. Найдите множество значений n, при которых дробь принимает целые значения:

а) $\frac{6}{n}$, где $n \in N$; в) $\frac{9}{n-5}$, где $n \in N$;

б) $\frac{5}{n}$, где $n \in Z$; г) $\frac{17}{n+2}$, где $n \in Z$.

17. При каких значениях m, где $m \in Z$, принимает целые значения дробь:

а) $\frac{7}{2m+1}$; б) $\frac{4}{3m-2}$; в) $\frac{10}{7m-3}$; г) $\frac{6}{5m+1}$?

18. При каких значениях y значение дроби равно нулю:

а) $\frac{y}{20}$; в) $\frac{y(y-9)}{3}$; д) $\frac{y^2+2y}{3y}$;

б) $\frac{y-2}{y}$; г) $\frac{y^2-36}{y^2+36}$; е) $\frac{y^2-6y+9}{y^2+3y}$?

19. При каких значениях x равна нулю дробь:

а) $\frac{4x-x^3}{4x}$; б) $\frac{4-x^2}{2x+4}$; в) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2}$; г) $\frac{4}{4-x^2}$?

20. Пользуясь определением частного, докажите тождество:

а) $\frac{m^2+3m-4}{m-1} = m+4$;

б) $\frac{a^4-7a^2+1}{a^2+3a+1} = a^2-3a+1$;

в) $\frac{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} = a+b$;

г) $\frac{a^4-4a^3+10a^2-12a+9}{a^2-2a+3} = (a-1)^2+2$.

Упражнения для повторения

21. Запишите путем перечисления элементов множество обыкновенных дробей с числителем, равным 1, и знаменателем b, где:

а) b — простое двузначное число, меньшее 50;
б) b — простое двузначное число, большее 50.

22. Разложите многочлен на множители:

а) $10ab + 15b^2$; в) $x^2 + xy - 3x - 3y$; д) $a^4 - 16$;
б) $27a^2 - 18ab$; г) $2xy - 5y^2 - 6x + 15y$; е) $49 - b^4$.

23. Разложите на множители выражение:

а) $x^2 - 10x + 25$; в) $(a + 1)^2 - 9a^2$; д) $x^3 + 8y^3$;
б) $y^2 + 6y + 9$; г) $b^2 - (b - 2)^2$; е) $x^3 - 27y^3$.

2. Свойства дробей

Сначала рассмотрим *основное свойство дроби*. Докажем, что равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \tag{1}$$

верно при всех допустимых значениях переменных, т. е. является тождеством.

Пусть $\frac{a}{b} = k$. Тогда по определению частного $a = bk$. Умножив обе части этого равенства на c, отличное от нуля, и применив переместительное и сочетательное свойства умножения, получим, что

$$ac = (bk)c, \text{ т. е. } ac = (bc)k.$$

По определению частного, учитывая, что $bc \neq 0$, имеем:

$$\frac{ac}{bc} = k.$$

Сравнивая равенства $\frac{a}{b} = k$ и $\frac{ac}{bc} = k$, заключаем, что

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Мы доказали, что при всех допустимых значениях переменных верно равенство (1), т. е. это равенство является тождеством.

Если вместо переменных a, b и c подставить произвольные выражения, имеющие смысл и тождественно не равные нулю, то также получится тождество.

Таким образом, любая дробь (числовая или содержащая переменные) обладает следующим свойством:

если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же выражение, то получится тождественно равная ей дробь.

Это свойство называют *основным свойством дроби.*

Частным случаем этого свойства (когда a, b и c — натуральные числа) является известное вам свойство: если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменится.

Основное свойство дроби позволяет привести любую дробь к некоторому новому знаменателю.

Пример 1. Приведем дробь $\frac{5}{2a^2b}$ к знаменателю $6a^2b^2$.

Это означает, что мы должны заменить ее тождественно равной ей дробью со знаменателем $6a^2b^2$.

Умножим числитель и знаменатель данной дроби на множитель $3b$ (так как $6a^2b^2 = 2a^2b \cdot 3b$):

$$\frac{5}{2a^2b} = \frac{5 \cdot 3b}{2a^2b \cdot 3b} = \frac{15b}{6a^2b^2}.$$

Множитель $3b$ называют *дополнительным множителем* к знаменателю и числителю дроби $\frac{5}{2a^2b}$.

Перепишем тождество (1) в виде

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},$$

поменяв в нем левую и правую части.

Это тождество позволяет дробь $\frac{ac}{bc}$, т. е. дробь, числитель и знаменатель которой имеют общий множитель, заменить тождественно равной дробью вида $\frac{a}{b}$. Такое преобразование называют *сокращением дроби.*

Пример 2. Сократим дроби:

$$\frac{26x}{13x^2} \quad \text{и} \quad \frac{2x^2+6xy}{7xy+21y^2}.$$

Разложим на множители числитель и знаменатель каждой дроби, затем сократим дробь на общий множитель числителя и знаменателя (если такой множитель окажется):

$\dfrac{26x}{13x^2} = \dfrac{13x \cdot 2}{13x \cdot x} = \dfrac{2}{x}$ (здесь общий множитель — одночлен $13x$);

$\dfrac{2x^2+6xy}{7xy+21y^2} = \dfrac{2x(x+3y)}{7y(x+3y)} = \dfrac{2x}{7y}$ (здесь общий множитель — двучлен $x + 3y$).

Пример 3. Построим график функции $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Область определения функции есть множество всех чисел, кроме числа 2.

Сократим дробь в правой части формулы:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2.$$

Получаем формулу $y = x + 2$, где $x \neq 2$.

Графиком функции $y = x + 2$ является прямая, а графиком функции $y = x + 2$, где $x \neq 2$, — прямая с исключенной точкой (2; 4) (рис. 1).

Рассмотрим другие свойства дроби.

Если у дроби изменить знак числителя (или знаменателя) и знак перед дробью, то получится тождественно равная ей дробь.

Используя переменные, это свойство можно записать в виде тождеств:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}. \qquad (2)$$

Докажем тождество $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$.

Обозначим дробь $\dfrac{-a}{b}$ буквой k, т. е. $\dfrac{-a}{b} = k$. Тогда по определению частного $-a = bk$. Умножив обе части этого равенства на -1, получим $a = -bk$, или $a = -kb$.

Отсюда $-k = \dfrac{a}{b}$, т. е. $k = -\dfrac{a}{b}$.

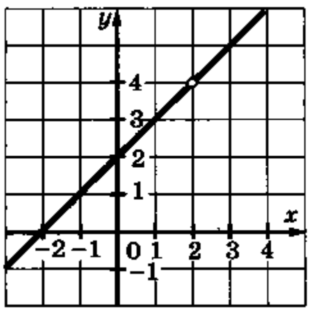


Рис. 1

Значит,

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

Тождество $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ может быть получено из тождества $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, если числитель и знаменатель дроби $\frac{-a}{b}$, записанной в левой части тождества, умножить на -1.

Пример 4. Найдем значение дроби

$$\frac{x^3 - 3x^2y + 4xy^2 + 3y^3}{2x^3 - x^2y - 10y^3},$$

если известно, что $\frac{5x + 8y}{7x - 8y} = 3$.

Числитель и знаменатель данной дроби — многочлены третьей степени, причем каждый член этих многочленов имеет одну и ту же степень, равную степени многочлена. Такие многочлены называют *однородными*. Если разделить числитель и знаменатель этой дроби на y^3 (или x^3), то получим выражение, значение которого зависит от $\frac{x}{y}$ $\left(\text{или } \frac{y}{x}\right)$.

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на y^3. Получим дробь

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 3}{2\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10}.$$

Из условия $\frac{5x + 8y}{7x - 8y} = 3$ находим значение $\frac{x}{y}$:

$5x + 8y = 3(7x - 8y)$, $5x + 8y = 21x - 24y$, $x = 2y$, $\frac{x}{y} = 2$.

Подставим это значение в преобразованную дробь. Получим:

$$\frac{2^3 - 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 3}{2\cdot 2^3 - 2^2 - 10} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

П р и м е р 5. Сократим дробь $\frac{3x-xy+2y-6}{xy-3x+2y-6}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{3x-xy+2y-6}{xy-3x+2y-6}=\frac{(3x-xy)-(6-2y)}{(xy-3x)+(2y-6)}=$$

$$=\frac{x(3-y)-2(3-y)}{x(y-3)+2(y-3)}=\frac{(3-y)(x-2)}{(y-3)(x+2)}.$$

По свойству (2) дробь $\frac{(3-y)(x-2)}{(y-3)(x+2)}$ можно заменить дробью $-\frac{(y-3)(x-2)}{(y-3)(x+2)}$ (мы изменяем знак в числителе и знак перед дробью).

Далее имеем:

$$\frac{(3-y)(x-2)}{(y-3)(x+2)}=-\frac{(y-3)(x-2)}{(y-3)(x+2)}=-\frac{x-2}{x+2}.$$

Мы рассмотрели примеры сокращения дробей, у которых числитель и знаменатель являются многочленами с целыми коэффициентами. Если числитель или знаменатель дроби не является многочленом с целыми коэффициентами, то такие дроби можно привести, используя основное свойство дроби, к дробям, числитель и знаменатель которых — многочлены с целыми коэффициентами.

Например, дробь $\frac{\frac{1}{3}y^2}{\frac{1}{4}y-1}$ можно привести к дроби $\frac{4y^2}{3y-12}$, умножив ее числитель и знаменатель на 12.

24. Приведите дробь к знаменателю $12x^2y$:

а) $\frac{1}{6x^2}$; б) $\frac{5}{3xy}$; в) $\frac{7x}{4y}$; г) $\frac{5}{12x}$.

25. Представьте двучлен $3x - y$ в виде дроби со знаменателем, равным:

а) 7; б) x; в) $9x + y$; г) $3x - y$.

26. Приведите дробь $\frac{a}{x-2}$ к знаменателю:

а) $x^2 - 2x$; в) $x^2 - 4$; д) $6 - 3x$; ж) $(x - 2)^2$;
б) $5x - 10$; г) $4 - x^2$; е) $x^3 - 8$; з) $(x - 2)^3$.

27. Сократите дробь:

а) $\frac{8xy}{32y}$; в) $\frac{ax^2}{2a^2x}$; д) $\frac{-21b^2y^2}{-28by}$;

б) $\frac{18ab}{27bc}$; г) $\frac{bc}{5b^2c^2}$; е) $\frac{-49a^3}{14b^3}$.

28. Сократите дробь (n — натуральное число):

а) $\frac{5a^{3n}}{2a^n}$; б) $\frac{48b^{2n-1}}{80b^{3n-1}}$; в) $\frac{17x^{n+1}}{51x^{n+4}}$; г) $\frac{91y^{3n-1}}{28y^{n+1}}$.

29. Найдите значение дроби:

а) $\frac{4^{10}}{8^7}$; б) $\frac{27^3}{9^5}$; в) $\frac{14^8}{4^4 \cdot 7^7}$; г) $\frac{18^3 \cdot 4^2}{12^4}$.

30. Сократите дробь:

а) $\frac{a^3(a-5)}{(a-5)}$; в) $\frac{x^3-4x}{y(x-2)}$; д) $\frac{(12a-12b)^3}{(6a-6b)^5}$;

б) $\frac{3(b+7)^4}{8(b+7)^6}$; г) $\frac{5(a-2c)^2}{2a^2-4ac}$; е) $\frac{(x-2y)^5}{(x^2-4xy+4y^2)^5}$.

31. Сократите дробь:

а) $\frac{ax-3a}{bx-3b}$; в) $\frac{3b-9c}{5b^2-15bc}$; д) $\frac{6x^2y-3xy^2}{6x^2y}$;

б) $\frac{5x+20y}{15x+60y}$; г) $\frac{8a^2+40ab}{ab+5b^2}$; е) $\frac{8ab^3}{4a^2b^2+8ab^3}$.

32. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}$; в) $\frac{2x+4y}{x^2-4y^2}$; д) $\frac{(x-1)^2}{5x-5}$; ж) $\frac{a^2-49}{a^2-14a+49}$;

б) $\frac{x^2-9}{4x-12}$; г) $\frac{3a+15b}{a^2-25b^2}$; е) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$; з) $\frac{b^2+10b+25}{b^2-25}$.

33. Найдите значение дроби:

а) $\frac{5x^2-35xy}{2xy-14y^2}$ при $x=0{,}12$, $y=0{,}4$;

б) $\frac{12a^2+30ab}{4a^2-25b^2}$ при $a=-0{,}5$, $b=-2{,}6$;

в) $\frac{a^2-8ax+16x^2}{4a^2-16ax}$ при $a=\frac{5}{7}$, $x=\frac{1}{8}$;

г) $\frac{4b^2-9y^2}{4b^2+12by+9y^2}$ при $b=-\frac{1}{4}$, $y=-\frac{5}{6}$.

34. Сократите дробь:

а) $\frac{27x^3+y^3}{9x^2-3xy+y^2}$;

б) $\frac{b^{12}+b^6+1}{b^{18}-1}$;

в) $\frac{ax+bx-2ay-2by}{3x-6y}$;

г) $\frac{10x+5y}{2ax+ay-2bx-by}$;

д) $\frac{b^2+2bd-by-2dy}{b^2+4bd+4d^2}$;

е) $\frac{9a^2-4b^2}{6ab+2b-3a-4b^2}$.

35. Сократите дробь:

а) $\frac{a^{2n}-b^4}{a^{n+1}-ab^2}$;

б) $\frac{x^{n+2}y^n+x^ny^{n+2}}{x^4y^n-y^{n+4}}$;

в) $\frac{x^{n+1}-2x^n-3x^{n-1}}{x^2-5x+6}$;

г) $\frac{b^{n+1}+7b^n+12b^{n-1}}{b^{n+2}+b^{n+1}-12b^n}$.

36. Зная, что $\frac{2x-7y}{y}=3$, найдите значение дроби:

а) $\frac{x^3-5x^2y+8xy^2-3y^3}{2x^3-8x^2y-7xy^2+22y^3}$;

б) $\frac{x^4+5y^4}{x^3y-x^2y^2+xy^3}$.

37. Сократите дробь:

а) $\frac{3(x-a)}{7(a-x)}$;

б) $\frac{x(b-y)}{y(y-b)}$;

в) $\frac{7a^2-21ab}{24b^2-8ab}$;

г) $\frac{4x^2-9y^2}{3xy-2x^2}$;

д) $\frac{(2x-3y)^2}{6y-4x}$;

е) $\frac{(2x-3y)^3}{(3y-2x)^2}$.

38. Упростите выражение:

а) $\dfrac{ay - ab}{bx - ab - xy + ay}$; в) $\dfrac{10a - a^2 - 25}{3a - 15}$;

б) $\dfrac{bx - ax + by - ay}{a^2 - b^2}$; г) $\dfrac{-a^3 - 8}{2a - a^2 - 4}$.

39. Покажите, что значение дроби не зависит от $n (n \in N)$:

а) $\dfrac{5^{n+2} - 5^n}{5^{n+2} + 5^{n+1} + 5^n}$; б) $\dfrac{81^{n+1} - 3^{n+4}}{3^{n+2}\left(27^n - 1\right)}$.

40. Сократите дробь:

а) $\dfrac{(a+1)^2 + 1}{a^4 + 4}$; д) $\dfrac{(x-4)^2 + (x-8)^2 - 10}{(x+1)^2 + (x-3)^2 - 80}$;

б) $\dfrac{b^3 + 1}{b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1}$; е) $\dfrac{(ax - by)^2 + (bx + ay)^2}{(cx - ay)^2 + (ax + cy)^2}$;

в) $\dfrac{9x^2 + 3x + 1}{81x^4 + 9x^2 + 1}$; ж) $\dfrac{2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2}{2a^3 - a^2 + a - 2}$;

г) $\dfrac{8y^6 - 1}{16y^8 - 4y^4 - 4y^2 - 1}$; з) $\dfrac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a - 13}$.

41. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 16}{2x + 8}$; б) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

42. Постройте график уравнения

$$\frac{4x^2 - y^2 - 2y - 1}{2x + y + 1} = 0.$$

43. Замените дробь тождественно равной ей дробью, числитель и знаменатель которой многочлены с целыми коэффициентами:

а) $\dfrac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6}a - \frac{1}{12}}$; б) $\dfrac{0{,}5x^2 - 1{,}25x + 1}{0{,}25x + 0{,}75}$.

44. Упростите выражение:

а) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$; б) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Замечание. Запись $n!$ читается «эн факториал» и означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Упражнения для повторения

45. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{12{,}7^2 - 5{,}3^2}{5 \cdot 0{,}96 + 2{,}6}$; б) $\dfrac{3{,}6^2 + 7{,}2 \cdot 15{,}4 + 15{,}4^2}{1{,}9(13{,}2 - 3{,}7)}$.

46. Решите уравнение:

а) $(x-2)(x-3)=0$; г) $x^3 - 4x = 0$;
б) $(x-1)(x+2)=0$; д) $x^2 - 9x + 14 = 0$;
в) $x^2 - 25 = 0$; е) $x^2 + 7x - 8 = 0$.

47. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2 - 6x + 10$; б) $a^2 + 4b^2 + 26 - 4ab + 10a - 20b$.

48. Разложите на множители:

а) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$; б) $y^2 - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{9}$; в) $a^4 - 16$; г) $a^4 + 324$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какое выражение называют дробью? Приведите примеры числовой дроби и дроби, содержащей переменные.

2. Укажите допустимые значения переменных для дроби:

а) $\dfrac{x}{x-8}$; б) $\dfrac{1}{y^2-1}$; в) $\dfrac{a}{a-b}$.

3. Какое выражение называется рациональным, целым, дробным? Приведите примеры целого и дробного рациональных выражений.

4. Сформулируйте основное свойство дроби. Запишите тождество, выражающее это свойство, и докажите его.

5. Поясните на примере, как выполняется сокращение дробей.

6. Докажите тождества $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{-a}{b}$ и сформулируйте соответствующие свойства дроби.

§ 2. СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ

3. Сложение и вычитание дробей

Покажем, что сумму и разность дробей всегда можно представить в виде дроби.

Рассмотрим случай, когда две дроби имеют одинаковый знаменатель, т. е. дроби вида: $\dfrac{a}{c}$ и $\dfrac{b}{c}$.

Докажем, что в этом случае выполняется тождество

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}. \tag{1}$$

По условию $c \neq 0$, так как в противном случае дроби $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ не имели бы смысла.

Обозначим дробь $\frac{a}{c}$ буквой k, а дробь $\frac{b}{c}$ буквой l:

$$\frac{a}{c} = k, \ \frac{b}{c} = l.$$

Тогда по определению частного

$$a = ck, \ b = cl \text{ и } a + b = ck + cl = c(k + l).$$

Значит, $a + b = c(k + l)$.

Отсюда, учитывая, что $c \neq 0$, получим, что $k + l = \frac{a+b}{c}$.

Так как $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = k + l$ и $k + l = \frac{a+b}{c}$, то

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Мы доказали, что равенство (1) верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. мы доказали тождество.

Опираясь на тождество (1), выполним сложение трех дробей:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{d}{c} = \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) + \frac{d}{c} = \frac{a+b}{c} + \frac{d}{c} = \frac{a+b+d}{c}.$$

Вообще для двух и более дробей выполняется правило:
чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить прежним.

Пример 1. Выполним сложение дробей

$$\frac{x^2+3xy}{5x-10y} \text{ и } \frac{4y^2-7xy}{5x-10y}.$$

Имеем:

$$\frac{x^2+3xy}{5x-10y} + \frac{4y^2-7xy}{5x-10y} = \frac{x^2+3xy+4y^2-7xy}{5x-10y} =$$

$$= \frac{x^2-4xy+4y^2}{5x-10y} = \frac{(x-2y)^2}{5(x-2y)} = \frac{x-2y}{5}.$$